Vektorrechnung

Papula Bd. 1, II

1 Grundbegriffe

• **Motivation von Vektoren und Vektorraum:**

vgl. Erweiterung der Zahlen $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
mit den reellen Vektorräumen

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$\ldots$	$\mathbb{R}^n$
$x = (3) = 3$	$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\ldots$	$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$
Zahlenstrahl	Ebene	Raum		n-dim. Vektorraum der
1-dim.	2-dim	3-dim		n-Vektoren

• **Begriffe und Definitionen**

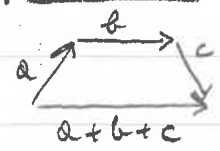
- **Gleichheit von Vektoren**: komponentenweise Gleichheit
- **Nullvektor(en)**: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\text{kurz}}{=} 0$ hat nur Nullen als **Komponenten**/**Koordinaten**

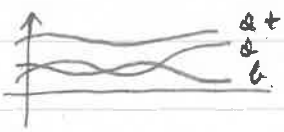
- **Einheitsvektor**: hat Länge (=Norm, =Betrag) eins
$$|e| = \|e\| = 1$$

• **(geometrische) Darstellungen/Anwendungen:**

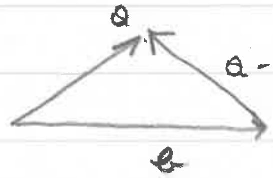
Vektoren als Punkte, Ortsvektoren, Pfeile, Geschwindigk., Beschleunigungen, Kräfte, ..., Signale, Listen, ...

• **Rechenoperationen:** $+, -, \cdot$ mit Zahl/Skalar: komponentenweise → Strecken, Stauchen, Invertieren





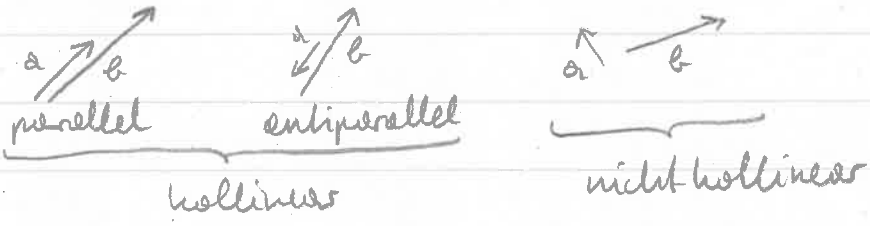
$a - b$



$a - b$ ... „Spitze minus Schaft"

später: inneres Produkt (= Skalarprodukt)

- <u>(Anti) parallele Vektoren = kollineare Vektoren:</u>



$b = 1{,}7a \qquad b = -2a \qquad b \neq \lambda \cdot a$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

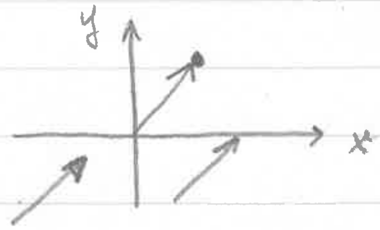
- <u>Rechenregeln</u>: a, b Vektoren und λ, μ Zahlen/Skalare

  $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b, \quad (\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$

  $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a) = \mu(\lambda a), \quad \|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$

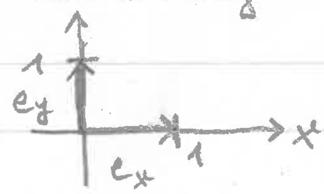
$\boxed{2}$ Vektorrechnung in der Ebene:

- $\mathbb{R}^2$ ... <u>Vektorraum</u>: Menge aller 2er-Vektoren $a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, 2-dimensional, Menge aller Punkte/Pfeile der Ebene



- $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist ein <u>Spaltenvektor</u>, $(3, -2)$ od. $(3|-2)$ ist ein <u>Zeilenvektor</u>

- <u>Standardbasisvektoren</u> $e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind Einheitsvektoren entlang der x- bzw. y-Achse



- Bspe. und Anwendungen:

(1) geg. 2 Pkte $A = (3|4)$ und $B = (2|-8)$

ges. Verbindungsvektor $\vec{AB}$: $\vec{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -12 \end{pmatrix}$

(2) Länge / Betrag / Norm von a: $\|a\| \equiv |a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

für $a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, vgl. Pythagoras

(3) Rechenoperationen:

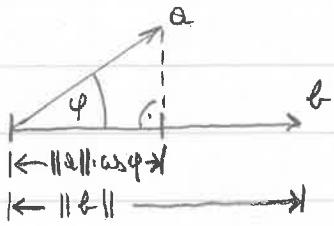
$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- Inneres Produkt (= Skalarprodukt):

(a) rechnerisch: sehr einfach $\Rightarrow$ gut am Computer zu implementieren

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \; a \cdot b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = -6 + 8 = 2$$

(b) geometrisch:



$$\boxed{\begin{aligned} a \cdot b &= \|a\| \cdot \cos\varphi \cdot \|b\| \\ &= \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\varphi \\ &\text{mit } \varphi \in [0, \pi] \end{aligned}}$$

(c) Regeln: $a \cdot b = b \cdot a$, $\quad a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a \perp b$

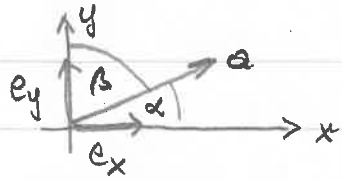
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; $\quad \lambda (a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$

(d) Folgerungen: $a \cdot a = \|a\|^2 \cdot \cos\varphi \underset{\varphi = 0}{=} \|a\|^2 \Rightarrow \|a\| = \sqrt{a \cdot a}$.

$a \cdot b = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{a \cdot b}{\|a\| \cdot \|b\|}$.

$\dfrac{a}{\|a\|}$ hat Länge 1 für jeden Vektor $a \neq 0$.

(e) Anwendungsbsp.: Welche Winkel bildet $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit den beiden Koordinatenachsen?



$$a \cdot e_x = \|a\| \cdot \underbrace{\|e_x\|}_{=1} \cdot \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\cos\alpha = \frac{a \cdot e_x}{\|a\|}}} = \frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\underline{\underline{\alpha}} = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \underline{\underline{26{,}6^\circ}}$$

analog: $a \cdot e_y = \|a\| \cdot \underbrace{\|e_y\|}_{=1} \cdot \cos\beta$

$$\underline{\underline{\cos\beta = \frac{a \cdot e_y}{\|a\|}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta}} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \underline{\underline{63{,}4^\circ}}$$

Check: $\alpha + \beta = 26{,}6^\circ + 63{,}4^\circ = 90^\circ$ ✓

▷ <u>linear (un)abhängig</u>: Eine Anzahl k an Vektoren der Ebene ist entweder linear abhängig oder linear unabhängig.

(a) <u>geometrisch</u> für $k=2$ Vektoren:

	lin. abh.	lin. unabh.
(b) <u>rechnerisch</u> für $k=2$ Vektoren:	$a = \lambda \cdot b$	$a \neq \lambda b$
(c) <u>in Worten</u>:	ein Vektor läßt sich als Vielfaches des anderen schreiben.	nicht

<u>Allg.</u>: Für $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_k$:

Die Vektoren sind <u>lin. unabh.</u> $\Leftrightarrow$ Die Gleichung $\underbrace{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k}_{\text{Linearkomb. der } k \text{ Vektoren } a_1, \ldots, a_k} = 0$ hat nur die triviale Lsg. $\lambda_i = 0$.

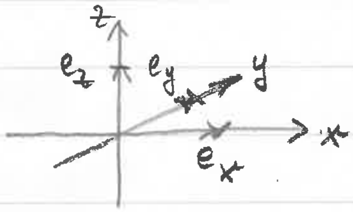
— " — <u>lin. abh.</u> $\Leftrightarrow$ Die Gleichung % hat auch eine nicht-triviale Lsg., z.B. $\lambda_3 \neq 0$.

D.h. $a_3 = \frac{-1}{\lambda_3}\left(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_4 a_4 + \dots + \lambda_k a_k\right)$
lässt sich als Linearkombination der anderen Vektoren ausdrücken.

In $\mathbb{R}^2$: $k=1$ nicht-Null vektor ist lin. unabh.
$k=2$ —"— -en sind lin. (un)abh.
$k \geq 3$ —"— sind lin. abh.

$\boxed{3}$ Vektorrechnung im Raum ($\mathbb{R}^3$)

○ Bsp.: $a = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ interpretiert wieder al Pkt., Pfeil, Kraft, geschw., etc.

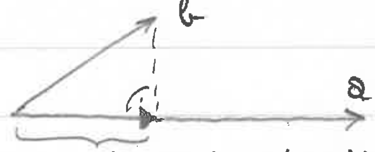


Standardbasisvektoren $e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

○ Alles analog, z.B. $\|a\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a \cdot a}$

○ Anwendungsbspe.:

– Orthogonale Projektion eines Vektors b auf einen zweiten Vektor a :



orth. Proj. = Vielfaches von a =
$\underbrace{\|b\| \cdot \cos\varphi}_{\frac{a \cdot b}{\|a\|} \text{ aus } a \cdot b = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\varphi} \cdot \underbrace{\frac{a}{\|a\|}}_{\text{Einheitsvektor in Richtung } a} = \frac{a}{\|a\|} \cdot \frac{a \cdot b}{\|a\|} = \otimes$

$$\otimes = \underbrace{\frac{a}{\|a\|}}_{\text{Vektor}} \cdot \underbrace{\left(\frac{a}{\|a\|} \cdot b\right)}_{\text{Zahl}} = \text{Vektor}$$

– Berechnung von Arbeit als Kraft mal Weg : S. 89 im Bd. 1

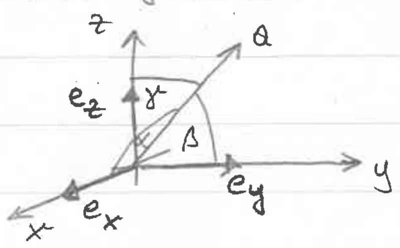
$F = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ Newton (N), $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ Meter (m), $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ Meter (m)

$$s = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Meter (m)}$$

$$\text{Arbeit} = F \cdot s = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 10 + 12 + 5 = 27 \text{ Nm} = 27 \text{ J}$$

Newtonmeter = Joule

– Richtungswinkel eines Vektors $a \in \mathbb{R}^3$: S. 83 Bd. 1



$$\cos\alpha = \frac{a \cdot e_x}{\|a\| \cdot \|e_x\|} = \frac{a_x}{\|a\|}$$

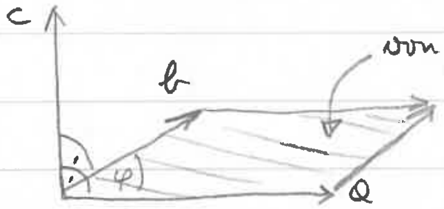
$$\cos\beta = \frac{a \cdot e_y}{\|a\| \cdot \|e_y\|} = \frac{a_y}{\|a\|}$$

$$\cos\gamma = \frac{a \cdot e_z}{\|a\| \cdot \|e_z\|} = \frac{a_z}{\|a\|}$$

▷ Neu/nur in $\mathbb{R}^3$: Vektor-/Kreuz-produkt

$$a, b \in \mathbb{R}^3 \to c = a \times b \in \mathbb{R}^3$$

∘ Geometrie:



c wird eindeutig bestimmt durch
- $c \perp a$ und $c \perp b$
- $\|c\|$ = Fläche des Parallelogramms
- Rechtehandregel

Fläche des Parallelogramms $= \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\varphi = \|c\|$

∘ Rechenregeln:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$
$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$
$$a \times b = -b \times a$$
$$\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b)$$

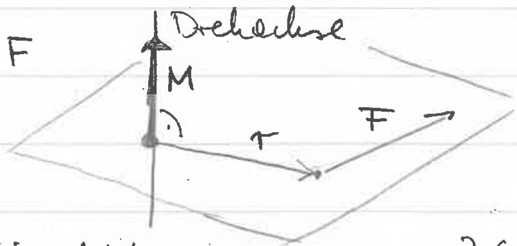
∘ Folgerung: $a \times b = 0 \iff$ a und b sind kollinear und somit lin. abh.

∘ <u>Berechnung</u>:

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ -[a_x \cdot b_z - a_z \cdot b_x] \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

∘ <u>Anwendungsbspe.</u>:

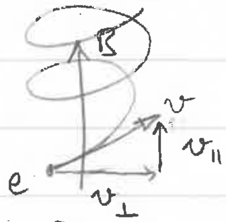
– Drehmoment $M = r \times F$



– Lorentz-Kraft auf eine elektr. Ladung q mit Geschw. v in einem Magnetfeld B

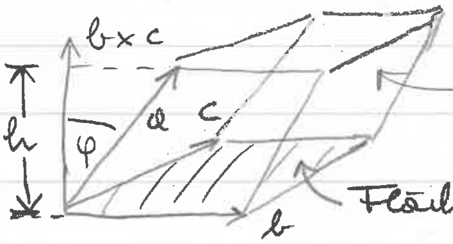
$$\underline{F = q \cdot v \times B}$$

z.B. $q = -e$ ... Elektronladung



▷ <u>Spatprodukt</u>: $[a\,b\,c] := a \cdot (b \times c) = [c\,a\,b] = [b\,c\,a]$ ... zykl. Vertauschung
von drei Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ $\quad = -[a\,c\,b]$ ... antizykl. Vertauschungen

∘ <u>Geometrie</u>:



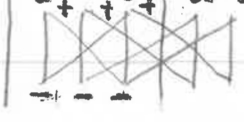
$$[a\,b\,c] = a \cdot (b \times c) = \|a\| \cdot \cos\varphi \cdot \|b \times c\|$$
$$= h \cdot A$$
$$= V$$

allg. $\underline{\underline{V = |[a\,b\,c]|}}$

∘ <u>Folgerung</u>: $[a\,b\,c] = 0 \iff a, b, c$ sind <u>lin. abh.</u>, <u>komplanar</u>

∘ Rechnungsvariante mittels <u>Determinante</u>:

$$[a\,b\,c] = \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix}}_{\text{Det. der Matrix der Spaltenvektoren}} =$$



Bsp. (1) S. 101, Bd. 1

▷ **linear (un)abhängige Vektoren im Raum:**

Seien $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^3$ k Vektoren des Raums.

Wenn $\boxed{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = 0}$

(1) nur die triviale Lösung $\lambda_i = 0$ hat, dann heißen die k Vektoren a_i lin. unabhängig

(2) auch nicht-triviale Lsg. hat, dann .... lin. abhängig.

◦ Speziell für $k=3$: a_1, a_2, a_3 lin. unabh. $\Leftrightarrow [a_1 a_2 a_3] \neq 0$

— " — lin. abh $\Leftrightarrow [a_1 a_2 a_3] = 0$

◦ Bsp.: (2) S. 103 Bd. 1

$\boxed{4}$ Anwendungen in der Geometrie

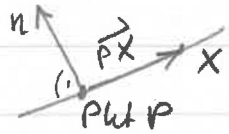
▷ **Geradengleichungen**

(a) in der Ebene: (a) $y = kx + d$

(b) Parameterform: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{Pkt} + \lambda \cdot \text{Richtungsv.}$

z.B. $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$

(c) Normalvektorform: $\overrightarrow{PX} = X - P$



$n \cdot \overrightarrow{PX} = 0$, d.h.,

$n \cdot (X - P) = 0$

$n \cdot X - n \cdot P = 0$

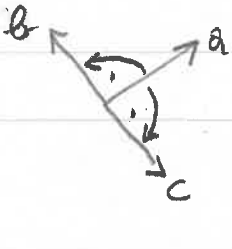
$n \cdot X = n \cdot P$

z.B. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$3x + 2y = 3 - 4 = -1$

$\underline{\underline{3x + 2y = -1}}$.

Intermesso: Drehen von Vektoren der Ebene um $\pm 90°$:



$a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$

$c = \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}$

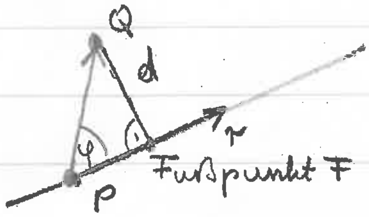
(b) im Raum: nur mit Parameterform

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{Pkt.} + \lambda \cdot \text{Richtungsvektor}$$

z.B. $$X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

z.B. Richtungsvektor als $\overrightarrow{PQ}$

▷ Abstand eines Punktes von einer Geraden: viele Möglichkeiten!

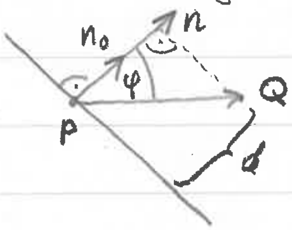


- im Raum z.B. via:

1.) Einheitsvektor $r_0 = \frac{r}{\|r\|}$

2.) $\|r_0 \times \overrightarrow{PQ}\| = \underbrace{\|r_0\|}_{1} \cdot \underbrace{\|\overrightarrow{PQ}\| \cdot \sin\varphi}_{d}$

- in der Ebene mit Gerade in Normalvektorform z.B. via:

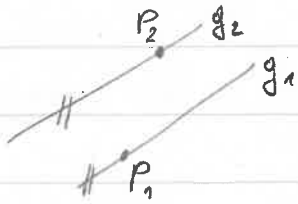


$n_0 \cdot \overrightarrow{PQ} = \underbrace{\|n_0\|}_{1} \cdot \underbrace{\|\overrightarrow{PQ}\| \cdot \cos\varphi}_{d \text{ bis auf Vorzeichen}}$

▷ Abstand zweier paralleler Geraden:

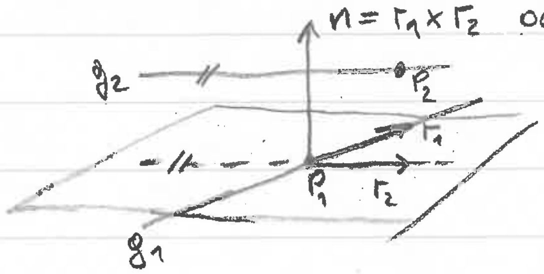
ist gleich Abstand von P_2 von g_1

oder Abstand von P_1 von g_2



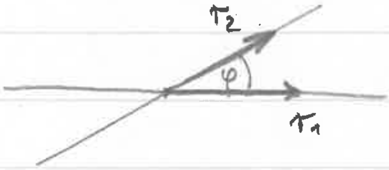
▷ Abstand zweier windschiefer Geraden: im Raum

$n = r_1 \times r_2$ oder $r_2 \times r_1$, $n_0 = \frac{n}{\|n\|}$



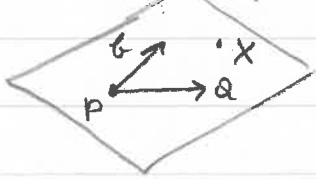
Abstand von g_1 zu g_2 = $|n_0 \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|$

▷ **Schnittwinkel zweier Geraden:**



$$\cos\varphi = \frac{r_1\cdot r_2}{\|r_1\|\cdot\|r_2\|} \longrightarrow \varphi = \dots$$

▷ **Ebene im Raum:** (a) Parameterform: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P + \lambda\cdot a + \mu\cdot b$

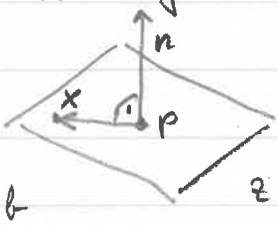


(b) Normalvektorform:

$n\cdot\vec{PX} = 0$

$n\cdot(X-P) = 0$

$n\cdot X = n\cdot P$

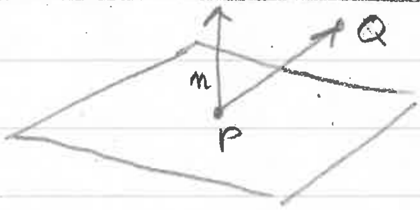


$n = a\times b$

z.B. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$3x + y + 4z = 7.$

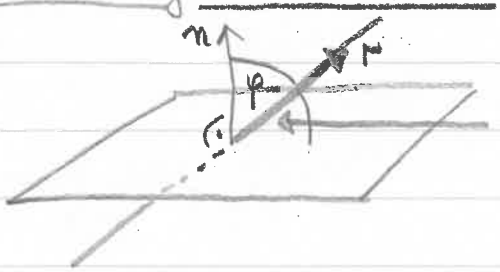
▷ **Abstand eines Punktes von einer Ebene:** $n_0 = \frac{n}{\|n\|}$



$$d = \left| n_0\cdot\vec{PQ}\right|$$

▷ **Abstand einer zu einer Ebene parallelen Geraden:** ↑

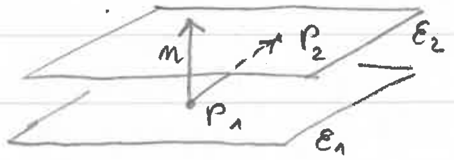
▷ **Schnittwinkel zw. Gerade und Ebene:**



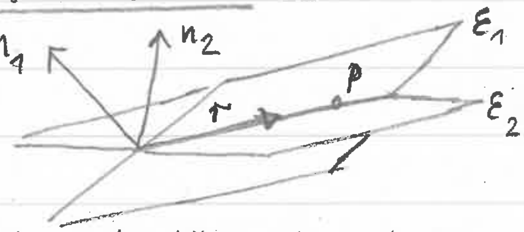
$$\cos\varphi = \frac{n\cdot r}{\|n\|\cdot\|r\|}$$

$90^\circ - \varphi$

▷ Abstand zweier Ebenen: ist gleich dem Abstand von P_2 von ε_1 oder P_1 von ε_2



▷ Schnittgerade zweier Ebenen:



Richtungsvektor d. Gerade
$r = n_1 \times r_2$

Punkt P der Schnittgeraden als eine (der ∞-vielen) Lsg. des lin. Gleichungssystems der Ebenengleichungen:

$$\varepsilon_1: a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$\varepsilon_2: a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$