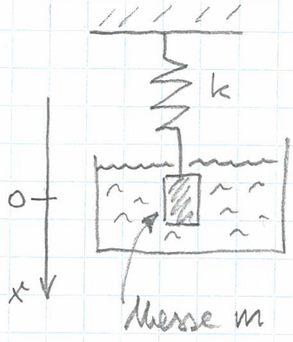
Differentialgleichungen – Teil 2

▷ Lineare DGL 2. Ordnung

Beispiel: gedämpfte Schwingung

Newtons Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = \underbrace{-d\dot{x}}_{\text{Reibungskraft}} \; \underbrace{-kx}_{\text{Rückstellkraft der Feder}}$$



Reibungskraft = $-d\dot{x}$, d.h. proportional zur Geschw.

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0 \qquad |:m$$

↑ konstante Koeffizienten

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Ansatz für die Lösung: $x(t) = e^{\lambda t}$. Finde jene Werte für λ, sodass $e^{\lambda t}$ die DGL erfüllt: λ_1, λ_2. Jede Lösung ist dann eine Linearkombination $C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ für Konstanten C_1 und C_2, weil die DGL linear ist.

Einsetzen von $x = e^{\lambda t}$:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{d}{m}\lambda e^{\lambda t} + \frac{k}{m} e^{\lambda t} = 0 \qquad |:e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 + \frac{d}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \quad \text{... quadr. Glg.}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$= -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\frac{d^2 - 4mk}{4m^2}}$$

Annahme $d^2 < 4mk$, d.h. schwache Dämpfg.

$$= -\frac{d}{2m} \pm \frac{\sqrt{-1}\sqrt{4mk - d^2}}{2m}$$

$$= -\frac{d}{2m} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{4mk - d^2}}{2m}}_{=:\,\omega}$$

$=: \omega$ ... Kreisfrequenz der gedämpf. Schwingung

$$\lambda_{1,2} = -\frac{d}{2m} \pm i\omega$$

Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung $\omega_0 = \frac{\sqrt{4mk - 0}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Beachte $\omega_0 \geq \omega$.

$$x(t) = e^{\left(-\frac{d}{2m} \pm i\omega\right)t} = e^{-\frac{d}{2m}t} \cdot e^{\pm i\omega t}$$

$$x(t) = e^{-\frac{d}{2m}t} \cdot \left[\cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)\right]$$ ... komplexwertige Lsg.

Da die DGL linear ist, sind sowohl der Real- als auch der Imaginärteil Lösungen:

Realteil: $e^{-\frac{d}{2m}t} \cdot \cos(\omega t)$

Imaginärteil: $e^{-\frac{d}{2m}t} \cdot \sin(\omega t)$

Die allgemeine reelle Lösung lautet somit

$$x(t) = \underbrace{e^{-\frac{d}{2m}t}}_{\text{exponentielle Dämpfung}} \underbrace{\left[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)\right]}_{\text{Schwingung mit Kreisfrequenz } \omega.}$$ für Konstanten A und B

▷ Systeme von DGL erster Ordnung

Beispiel: Fortsetzung der gedämpften Schwingung

Die DGL 2. Ordg. $\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ kann durch Einführen der Geschwindigkeitsvariablen v zu zwei gekoppelten DGL 1. Ordg. umgeschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \ddot{x} = -\frac{d}{m}v - \frac{k}{m}x \end{aligned}\right\} \text{ System von zwei DGL erster Ordg.}$$

In Matrixform schreibbar, weil linear:

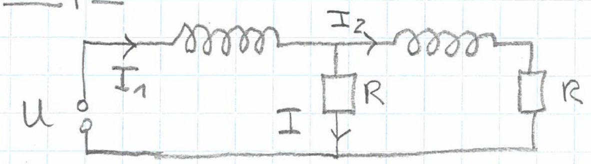
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix}}_{\text{Ableitung des Zustandsvektors}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}}_{\text{Zustandsvektor}}$$

= Geschwindigkeitsvektor des Zustands (nicht des Ortes!)

$$\boxed{\dot{X} = \underbrace{A \cdot X}_{\text{Vektorfeld auf Zustandsraum.}}} \quad \text{für } X = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \text{ und } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{pmatrix}$$

Lösung $X(t)$ folgt den Vektoren des Vektorfeldes.

Beispiel aus der Elektrotechnik



$$\underbrace{\begin{aligned} L\dot{I}_1 + RI &= U \\ L\dot{I}_2 + RI_2 - RI &= 0 \quad \text{und } I = I_1 - I_2 \end{aligned}}$$

$$\dot{I}_1 = -\frac{R}{L} I_1 + \frac{R}{L} I_2 + \frac{U}{L}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{R}{L} I_1 - 2\frac{R}{L} I_2$$

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R/L & R/L \\ R/L & -2R/L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U/L \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{X} = A \cdot X + B}$$ inhomogenes (weil $B \neq 0$) System von 2 DGL 1. Ordg.

Lösungsmethoden:

(a) Vgl. $\dot{y} + ay = b$ hat die Lsg. $y = e^{-at}\left[\int e^{at} b \, dt + C\right]$
mit $a \in \mathbb{R}$

Analog:

$$\boxed{X(t) = e^{At}\left[\int e^{-At} B \, dt + C\right]}$$

Dabei muss das Matrix-Exponential e^{At} durch die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion definiert werden:

für $x \in \mathbb{R}$: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots$

analog für Matrix A: $e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \ldots$

Einheitsmatrix

(b) mittels Eigenwerten und Eigenvektoren der Matrix A:

→ Entkopplung des Systems.

Die Matrix A habe die Eigenwerte λ_1 und λ_2 mit den zugehörigen Eigenvektoren V_1 und V_2, anhand derer sich jeder Vektor im Zustandsraum eindeutig zerlegen lässt.

$$X(t) = c_1(t)\, V_1 + c_2(t)\, V_2$$

$$| \quad = \quad \cdot \quad | \quad + \quad \cdot \quad |$$

$$\dot{X}(t) = \dot{c}_1(t)\, V_1 + \dot{c}_2(t)\, V_2$$

$$B = b_1\, V_1 + b_2\, V_2$$

$$A\, X(t) = A \left[c_1(t)\, V_1 + c_2(t)\, V_2 \right] =$$

$$= c_1(t)\, A\, V_1 + c_2(t)\, A\, V_2 =$$

$$= c_1(t)\, \lambda_1 V_1 + c_2(t)\, \lambda_2 V_2 .$$

Alles in die DGL $\dot{X}(t) = A\,X(t) + B$ einsetzen liefert

$$\dot{c}_1(t)\, V_1 + \dot{c}_2(t)\, V_2 = c_1(t)\, \lambda_1 V_1 + c_2(t)\, \lambda_2 V_2 + b_1 V_1 + b_2 V_2$$

$$= \left[c_1(t)\, \lambda_1 + b_1 \right] V_1 + \left[c_2(t)\, \lambda_2 + b_2 \right] V_2$$

Komponenten links und rechts müssen übereinstimmen:

$$\left.\begin{aligned} \dot{c}_1(t) &= \lambda_1\, c_1(t) + b_1 \\ \dot{c}_2(t) &= \lambda_2\, c_2(t) + b_2 \end{aligned}\right\} \text{ 2 entkoppelte DGL 1. Ordg., die einzeln gelöst werden können.}$$

Anfangswerte: $X(0) = c_1(0)\, V_1 + c_2(0)\, V_2$

$$\checkmark \quad ? \quad \checkmark \quad ? \quad \checkmark$$

$$X(0) = \left[V_1 \; V_2 \right] \begin{pmatrix} c_1(0) \\ c_2(0) \end{pmatrix}$$

$$| \quad = \quad \boxed{} \quad |$$

lineares Gleichungssystem liefert $c_1(0)$ und $c_2(0)$.

Dadurch sind $c_1(t)$ und $c_2(t)$ eindeutig bestimmt und somit auch $X(t) = c_1(t)\, V_1 + c_2(t)\, V_2$.