Eigenwerte und Eigenvektoren

Def Ein Eigenvektor einer quadratischen Matrix A ist ein nicht-Null-Vektor x, so daß $\boxed{Ax = \lambda x}$ für eine Zahl λ gilt. Die Zahl λ ist der Eigenwert von A zum Eigenvektor x.

▷ Berechnung:

Argumentationskette: Falls x Eigenvektor (EV) von A zum Eigenwert (EW) λ, dann gilt $Ax = \lambda x \quad | -\lambda x$

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Da x laut Annahme ein nicht-Null-Vektor ist, hat die Matrix $A - \lambda I$ einen nicht-trivialen Kern und die Determinante von $A - \lambda I$ ist somit Null: $\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$.

Aus dieser Bedingung lassen sich alle EW λ berechnen. Anschließend kann zu jedem EW λ der zugehörige Eigenraum (= Menge der EV zum EW λ) berechnet werden, indem das lin. Glgsys. $(A - \lambda I)x = 0$ gelöst wird.

▷ Beispiel $\quad A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8-\lambda & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (0{,}8-\lambda)(0{,}7-\lambda) - 0{,}06 =$$
$$= 0{,}56 - 1{,}5\lambda + \lambda^2 - 0{,}06 =$$
$$= \lambda^2 - 1{,}5\lambda + 0{,}5 \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{9/16 - 1/2} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$$

$\underline{\lambda_1 = 1}$

$\underline{\lambda_2 = 1/2}$

- Eigenraum zum EW $\lambda_1 = 1$:

$(A - \lambda_1 I)\, x = 0$

$$\begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & -0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 2x_1 - 3x_2 = 0$$

$$x_1 = \frac{3}{2} x_2$$

$$\underline{\underline{x \in \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}} \quad \text{z.B. } x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ od. } \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$$

- Eigenraum zum EW $\lambda_2 = 0{,}5$:

$(A - \lambda_2 I)\, x = 0$

$$\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = -x_2$$

$$\underline{\underline{x \in \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}} \quad \text{z.B. } x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = 0{,}5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \checkmark$$