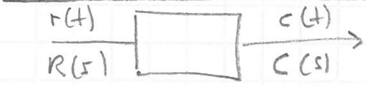
Regelungstechnik – Anwendungen

▷ **Anfangs- und Endwertsatz:**

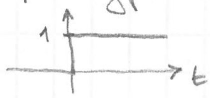
Bsp



$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad \ldots \text{ Übertragungsfkt.} \;\hat{=}\; \text{DGL}$$

$$\dot{c}(t) + 2c(t) = r(t)$$

Input: Sprungfunktion



$r(t) = 1$ für $t \geq 0$

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

Output:

Sprungantwort: $C(s) = G(s)R(s)$

$$c(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = \frac{1}{2} \quad \ldots \text{ Endwert}$$

Der Endwert lässt sich, ohne die DGL (irgendwie) zu lösen, schon aus der Laplacetransformierten bestimmen:

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot C(s) \quad \ldots\ldots \boxed{\text{Endwertsatz}}$$

Nachrechnen: $s\cdot C(s) = s\cdot G(s)\cdot R(s) = s\,\frac{1}{s+2}\cdot\frac{1}{s} =$

$$= \frac{1}{s+2} \xrightarrow[s\to 0]{} \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

Analog lässt sich der Anfangswert bestimmen:

$$\lim_{t\to 0} c(t) = \lim_{s\to\infty} s\cdot C(s) \quad \ldots\ldots \boxed{\text{Anfangswertsatz}}$$

Nachrechnen: $s\cdot C(s) = \ldots = \frac{1}{s+2} \xrightarrow[s\to\infty]{} 0 \quad \checkmark$

$\boxed{\text{Beweise:}}$ $\quad f(t) \leftrightarrow F(s)$

Endwertsatz: $\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(0)$

$$\int_0^\infty \dot{f}(t)\underbrace{e^{-st}}_{\to 1}dt = sF(s) - f(0) \quad \Big|\lim_{s\to 0}$$

$$f(\infty) - \cancel{f(0)} = \lim_{s\to 0} sF(s) - \cancel{f(0)}$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s). \quad \square$$

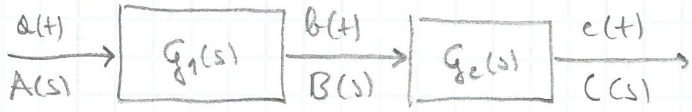
Anfangswert: $\int_0^\infty \dot{f}(t)\underbrace{e^{-st}}_{\to 0}dt = sF(s) - f(0) \quad \Big|\lim_{s\to\infty}$

$$0 = \lim_{s\to\infty} sF(s) - f(0)$$

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s). \quad \square$$

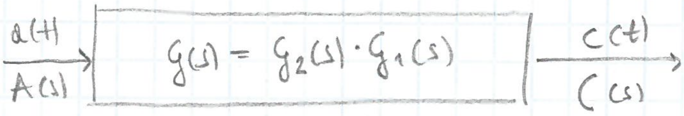
▷ Rechnen mit Übertragungsfunktionen, Blockschaltbilder:

Reihenschaltung:



$$C(s) = G_2(s)\,B(s) = G_2(s)\cdot G_1(s)\cdot A(s)$$

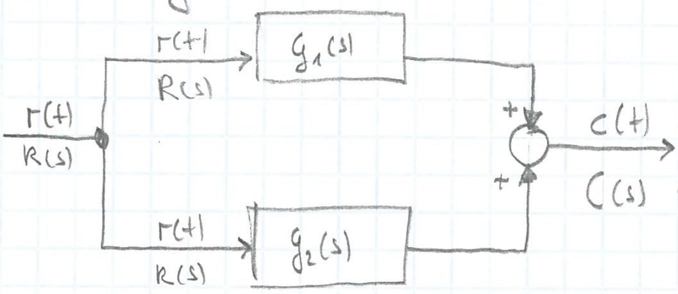
$$B(s) = G_1(s)\,A(s)$$



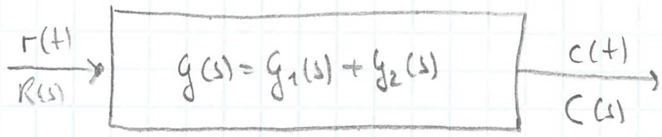
Gesamtübertragungsfkt.

⌜Reihenfolge egal!⌟

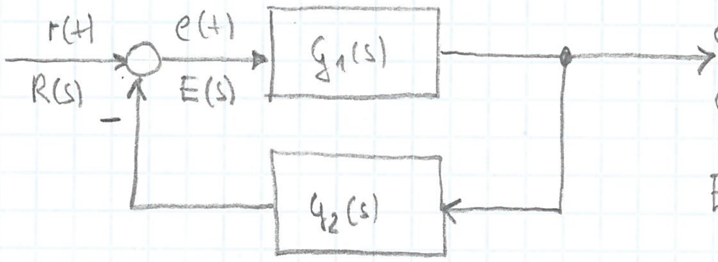
Parallelschaltung:



$$C(s) = G_1(s)\,R(s) + G_2(s)\,R(s) = (G_1(s) + G_2(s))\,R(s)$$



Rückkopplung:



$$C(s) = G_1(s)\,E(s)$$

$$E(s) = R(s) - G_2(s)\,C(s)$$

$$C(s) = G_1(s)\,[R(s) - G_2(s)\,C(s)]$$

$$C = G_1 R - G_1 G_2 C \qquad | + G_2 C$$

$$C + G_1 G_2 C = G_1 R$$

$$(1 + G_1 G_2)\,C = G_1 R$$

$$C = \underbrace{\frac{G_1}{1 + G_1 G_2}} R$$

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)\,G_2(s)}$$

▷ Frequenzgang: harmonischer Input

$$r(t) \longrightarrow \boxed{g(s)} \longrightarrow c(t)$$

$$r(t) = r_0 \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left[r_0 e^{j\omega t} \right] \quad , \quad c(t) = c_0 \cos(\omega t + \varphi) = = \mathrm{Re}\left[c_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \right]$$

$$g(s) \overset{\text{z.B.}}{=} \frac{5s^2 - 3s + 2}{7s^3 + s^2 - 4s + 8} \;\hat{=}\; \text{Dgl:}$$

$$7\dddot{c} + \ddot{c} - 4\dot{c} + 8c = 5\ddot{r} - 3\dot{r} + 2r$$

$$\text{Re von:} \quad \left[7(j\omega)^3 + (j\omega)^2 - 4(j\omega) + 8\right] c_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = \left[5(j\omega)^2 - 3(j\omega) + 2\right] r_0 e^{j\omega t}$$

$$c_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{[5 \ldots\ ]}{[7 \ldots\ ]} r_0 e^{j\omega t} \quad \Big| : e^{j\omega t}$$

$$\underbrace{\frac{c_0 e^{j\varphi}}{r_0}}_{} = \frac{5(j\omega)^2 - 3(j\omega) + 2}{7(j\omega)^3 + (j\omega)^2 - 4(j\omega) + 8} = g(j\omega)$$

komplexer Amplitudenfaktor zw. Input und Output

$$r_0 e^{j\omega t} \longrightarrow \cdot \underbrace{\frac{c_0}{r_0} e^{j\varphi}}_{= g(j\omega)} \longrightarrow c_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$r_0 e^{j\omega t} \xrightarrow{\mathrm{Re}} r_0 \cos(\omega t) \qquad\qquad c_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \xrightarrow{\mathrm{Re}} c_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$g(j\omega) \xrightarrow{\text{Radius}} \frac{c_0}{r_0} \qquad\qquad g(j\omega) \xrightarrow{\text{Phase}} \varphi$$

$\frac{c_0}{r_0}$: Amplitudenverstärkung, $|g(j\omega)|$, Gain

φ: Phasenschub, $\arg g(j\omega)$

Impedanzen

Ohmscher Widerstand:

$$u(t) = R\, i(t)$$

$$\boxed{U(s) = R\, I(s)}$$ Impedanz R

Kondensator:

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = \frac{1}{C}\, q(t)$$

$$\dot{u}(t) = \frac{1}{C}\, i(t)$$

$$s\,U(s) = \frac{1}{C}\, I(s) \rightarrow \boxed{U(s) = \frac{1}{Cs}\cdot I(s)}$$

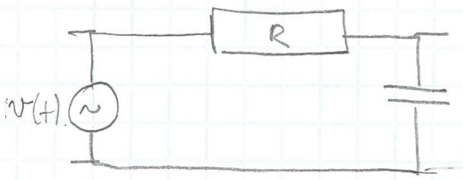
Impedanz $\frac{1}{Cs}$

Spule:

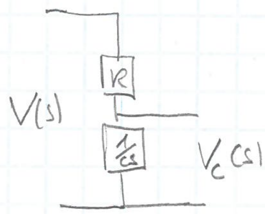
$$u(t) = L\,\frac{di}{dt}$$

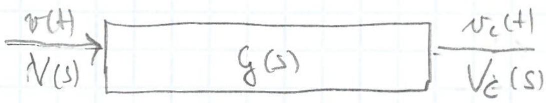
$$U(s) = Ls\, I(s) \rightarrow \boxed{U(s) = Ls\cdot I(s)}$$

Impedanz Ls



Spannungsteiler:





$$\boxed{G(s) = \frac{1}{RCs+1}}$$

$$V(s) = R\,I(s) + V_C(s)$$

$$\frac{1}{Cs} I(s) = V_C(s)$$

$$I(s) = Cs\,V_C(s)$$

$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1}{RCs+1} \quad \leftarrow \quad V(s) = [RCs+1]\,V_C(s)$$

$|G(j\omega)| = ?$

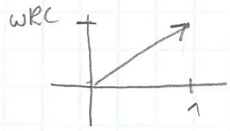
$$G(j\omega) = \frac{1}{RCj\omega+1} = \frac{1}{1+j\omega RC}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1+j\omega RC} \cdot \frac{1}{1-j\omega RC}} =$$

$$\underline{\underline{|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}}} \quad \ldots \text{\underline{Amplitudengang}}$$

$\arg G(j\omega) = ?$

$$\arg \text{ von } 1+j\omega RC = \arctan(\omega RC)$$



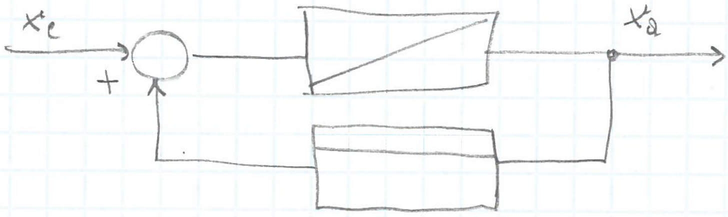
$$\arg \text{ von } \frac{1}{re^{i\varphi}} = \arg \text{ von } \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$$

$$\Rightarrow \underline{\arg G(j\omega) = -\arctan(\omega RC)} \quad \ldots \text{\underline{Phasengang}}$$

<u>Ortskurve</u>: $G(j\omega)$ als Funktion von ω in $\mathbb{C}$

▷ Stabilität:

∘ Bsp. (Philippsen p. 142f) Rückgekoppelter Integrator



$$\dot{x}_a(t) = x_e(t) + k\,x_a(t) \qquad | \;\mathcal{L}$$

$$s\,X_a(s) = X_e(s) + k\,X_a(s)$$

$$(s-k)\,X_a = X_e$$

$$X_a = \underbrace{\frac{1}{s-k}}_{G(s)=\frac{1}{s-k}}\,X_e$$

Sprungantwort: $\underline{H(s) = \frac{1}{s-k}\cdot\frac{1}{s}} \;\hat{=}\; \underline{-\frac{1}{k}\left(1-e^{kt}\right) = h(t)}$

ist stabil, wenn $k < 0$.

Allg.: k ist Nullstelle des Nenners der Übertragungsfkt. $\overset{!}{<} 0$ im Realteil

∘ Allg. (Haager, p. 109f)

mit Sprungfkt. $X_a(s)$

allg. Übertragungsfkt: $$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots a_1 s + a_0}\cdot\frac{1}{s}$$

↓

Partialbruchzerlegung (Ann. alle Nullstellen verschieden)

↓

$$X_a = G(s)X_e(s) = \frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_2}{s-s_2} + \dots + \frac{c_n}{s-s_n} \qquad | \;\mathcal{L}^{-1}$$

$$\underline{x_a(t) = c_0 + c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \dots + c_n e^{s_n t}}$$

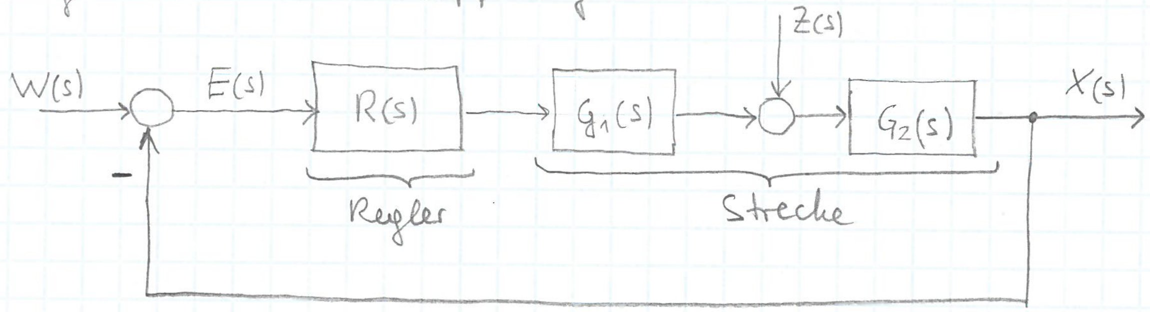
↳ stabil, wenn alle s_i einen negativen Realteil haben, also in der linken Halbebene von $\mathbb{C}$ liegen.

d.h. alle Polstellen (= Nullstellen des Nenners) der Übertrgsfkt. $G(s)$

Reglerentwurf an einem Beispiel

Literatur: Philippsen: Einstieg in die Regelungstechnik. S. 133 ff.

Regelkreis mit Störeinkopplung



Ziele: schnelles Ausregeln von Störungen $Z(s)$, Stabilität und schnelles Folgen der Führungsgröße $W(s)$: $X(s) \simeq W(s)$

Größen: $W(s)$ ... Führungsgröße

$E(s)$ ... Regeldifferenz $E(s) = W(s) - X(s)$

$X(s)$ ... Regelgröße

$Z(s)$ ... Störgröße

Übertragungsfunktionen:

$$X = \underbrace{R\, G_1 G_2}_{=:G_0} \big(\underbrace{W - X}_{=E}\big) + G_2 Z \quad ; \quad \text{offener Kreis } G_0 := R\, G_1 G_2$$

$$X = \underbrace{\frac{G_0}{1+G_0}}_{=:G_W} W + \underbrace{\frac{G_2}{1+G_0}}_{=:G_Z} Z$$

G_W ... Führungsübertragungsfunktion

G_Z ... Störübertragungsfunktion

Stationäres Regelkreisverhalten:

$$E = W - X = W - \frac{G_0}{1+G_0} W - \frac{G_2}{1+G_0} Z =$$

$$= \frac{1}{1+G_0} W - \frac{G_2}{1+G_0} Z$$

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s\, E(s)$$

Bsp.: $G_1(s) = \frac{1}{1+s}$, $G_2(s) = \frac{1}{1+2s}$

1.) Annehmen: $w(t)$ ... Sprungfunktion

$$z(t) = 0$$

Für $\boxed{\text{P-Regler } R(s) = K}$:

Dann gilt $G_0(s) = R(s)G_1(s)G_2(s) = \frac{K}{(1+s)(1+2s)}$

$$E(s) = \frac{1}{1+G_0(s)} W(s) = \ldots = \frac{(1+s)(1+2s)}{K+(1+s)(1+2s)} \overbrace{\frac{1}{s}}^{W(s)}$$

und $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = \lim\limits_{s\to 0} sE(s) = \frac{1}{1+K}$.

Der stationäre Fehler $\lim\limits_{t\to\infty} e(t)$ ist ungleich Null, auch im Fall hoher Regelverstärkung K.

Für $\boxed{\text{I-Regler } R(s) = \frac{1}{s}}$:

$$E(s) = \frac{s(1+s)(1+2s)}{1+s(1+s)(1+s)} W(s) = \frac{(1+s)(1+2s)}{1+s(1+s)(1+2s)}$$

und $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = \lim\limits_{s\to 0} sE(s) = \underline{\underline{0}}$. Der stat. Fehler ist also Null!

2.) Annehmen: $w(t) = t$ ... Rampenfunktion

$$z(t) = 0$$

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

Dann gilt $E(s) = \frac{s(1+s)(1+2s)}{1+s(1+s)(1+2s)} \cdot \frac{1}{s^2}$ und

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = \underline{\underline{1}}.$$

3.) Annehmen: $w(t) = 0$, $z(t) =$ Sprungfunktion

$$R(s) = \frac{1}{s} \ldots \text{ I-Regler}$$

$$E(s) = -\frac{G_2(s)}{1+G_0(s)} Z(s) = \ldots = -\frac{s(1+s)}{1+s(1+s)(1+2s)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \underline{\underline{0}}.$$