Numerische Lösungsmethoden

vgl. Farlow Lessons 37, 38, 39 und MacCluer Chapter 12

Ziel: $\boxed{\text{PDGL}}$ → finite Differenzen → algebraische Glgen mit Computer iterativ lösen

→ anderer Ansatz: Galerkin, finite Elemente

▷ Finite Differenzen: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Taylorreihe

$$(1) \quad \boxed{f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x) h^2 + \ldots}$$

$$f(x+h) \simeq f(x) + f'(x) h$$

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \ldots \text{ forward difference approximation}$$

analog: $$f'(x) \cong \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad \ldots \text{ backward} \quad \text{– " –}$$

$\frac{1}{2}, +$

$$f'(x) \simeq \frac{1}{2h} \left[f(x+h) - f(x-h) \right] \ldots \text{ central difference approx.}$$

analog: (1)

$$(2) \quad f(x-h) \doteq f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x) h^2 \quad \Big] +$$

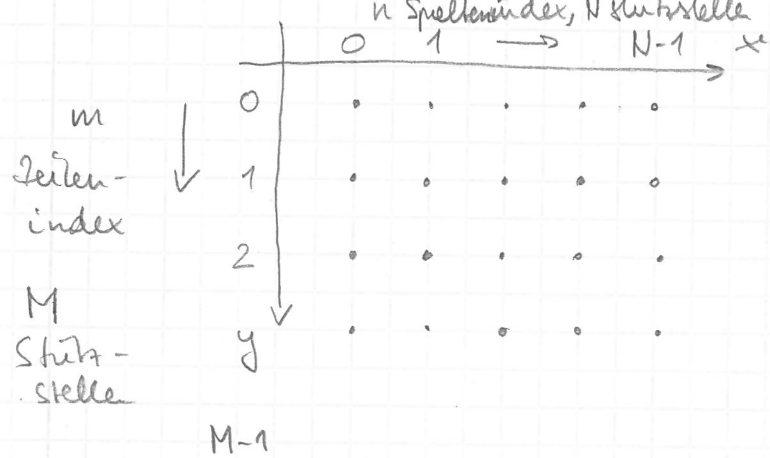
$$f(x+h) + f(x-h) \simeq 2f(x) + f''(x) h^2$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} \left[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \right].$$

→ Bilder der Approx!

▷ Anwendung auf Laplace-Gleichung:

$$\boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0}$$



Fkt. $\quad$ $M \times N$ Matrix

$$u(x,y) \doteq u_{m,n}$$

$$u(x+h, y) \doteq u_{m,n+1}$$

Schrittweite h in x-Richtg

$$u(x, y+k) = u_{m+1,n}$$

Schrittweite k in y-Richtg

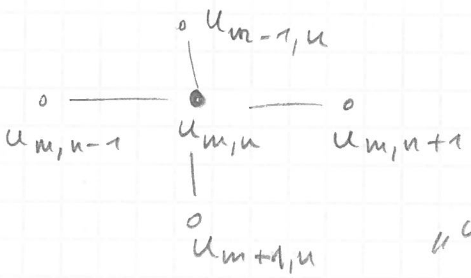
$$\left.\begin{aligned} u_{xx}(x,y) &\cong \frac{1}{h^2}\left[u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}\right] \\ u_{yy}(x,y) &\cong \frac{1}{k^2}\left[u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}\right] \end{aligned}\right] +$$

$\boxed{\text{für } h=k:}$

$$0 \overset{!}{=} u_{xx} + u_{yy} \cong \frac{1}{k^2}\left[u_{m,n+1} + u_{m,n-1} + u_{m+1,n} + u_{m-1,n} - 4u_{m,n}\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{u_{m,n} = \frac{1}{4}\left[u_{m,n+1} + u_{m,n-1} + u_{m+1,n} + u_{m-1,n}\right]}}$$

in Worten: u bei (m,n) ist gleich dem Mittelwert der 4 benachbarten Stützstelle



„computational molecule"

▷ <u>Liebmanns Methode</u>: 1.) Definiere $u^{(0)}$-Matrix

2.) iteriere $u^{(i+1)} = \frac{1}{4}\left[\ \dots u^{(i)}\ \right]$ für innere Pkte!

bis $u^{(i+1)} - u^{(i)}$ klein, d.h

$$\Delta u \cong 0$$

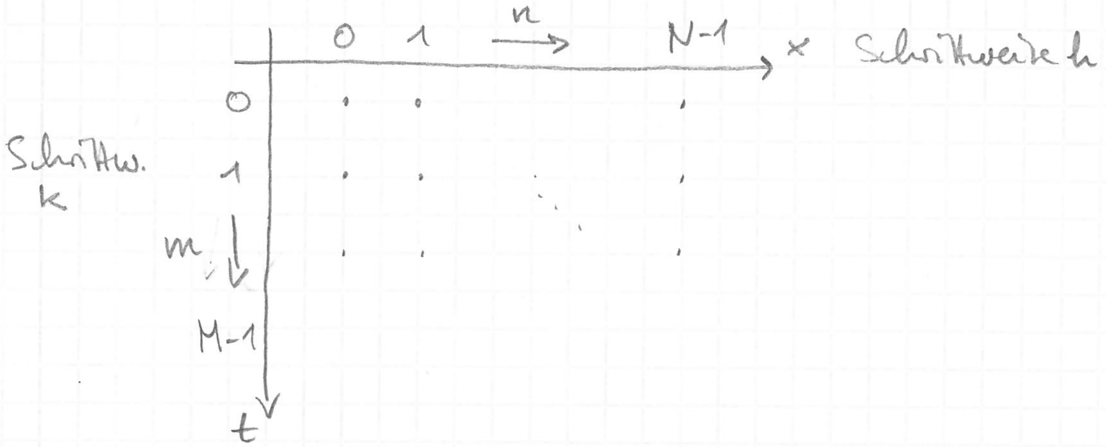
Wärmeleitungsgleichung:

Bsp: PDE: $u_t = u_{xx}$, $0 < x < 1, 0 < t$

BC: $u(0,t) = 1$

$u_x(1,t) = -[u(1,t) - g(t)]$ oder $u(1,t) = 2$

IC: $u(x,0) = 0$, $0 \le x \le 1$



$u_t \simeq \frac{1}{k}(u_{m+1,n} - u_{m,n})$ ... Schrittweite k in t-Richtg

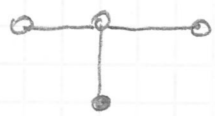
forward diff. approx.

$u_{xx} \cong \frac{1}{h^2}(u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1})$ ... Schrittw. h in x-Richtg.

$u_t = u_{xx}$ wird zu

$$\underline{u_{m+1,n} = u_{m,n} + \frac{k}{h^2}(u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1})}$$

computational molecule:



Stabilitätsbedingung:

$$\frac{k}{h^2} \le \frac{1}{2}$$

Nebenbed. $u_x(1,t) = -\lambda[u(1,t) - g(t)]$ wird zu

$$\frac{1}{h}(u_{m,N-1} - u_{m,N-2}) = -\lambda(u_{m,N-1} - g_m)$$

backw. diff. approx

$$\underline{u_{m,N-1} = \frac{u_{m,N-2} + h \cdot \lambda \cdot g_m}{1 + h \cdot \lambda}}.$$

▷ Crank-Nicholson   vgl. MacCluer Chapter 12 p. 238 ff.

$$u_{m+1,n} = u_{m,n} + \underbrace{\frac{k}{h^2}}_{=:r}\left(u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}\right)$$

und Randbed. $u_{m,0} = 0 \qquad (u(t,0)=0)$

$u_{m,N-1} = 1 \qquad (u(t,L)=1)$

in Matrix-form umschreiben:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ u_{m+1,1} \\ u_{m+1,2} \\ \vdots \\ u_{m+1,N-2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{u^{m+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ r & 1-2r & r & 0 & & 0 \\ 0 & r & 1-2r & r & & \vdots \\ & & & \ddots & & \\ & & & r & 1-2r & r \\ & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ u_{m,1} \\ u_{m,2} \\ \vdots \\ u_{m,N-2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{u^m}$$

$u^m = T^m u^0$ ... Das bisherige umgeschrieben.

▷ NEU: $T = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Einheitsmatrix}}}{I} + rR$ mit $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ersetze $u^{m+1} = (I + rR)\,u^m = u^m + rRu^m$

mit $u^{m+1} = u^m + \frac{r}{2}Ru^m + \frac{r}{2}Ru^{m+1}$

$$u^{m+1} - \frac{r}{2}Ru^{m+1} = u^m + \frac{r}{2}Ru^m$$

$$\underbrace{\left(I - \frac{r}{2}R\right)}_{\substack{\text{bekannte} \\ \text{Matrix}}} \underbrace{u^{m+1}}_{\substack{\text{neuer} \\ \text{Iterationsvektor: gesucht}}} = \left(I + \frac{r}{2}R\right) \underbrace{u^m}_{\substack{\text{alter Iterationsvektor:} \\ \text{bekannt}}}$$ ... lin. Glgssystem

vgl. $\underline{A\,u^{m+1} = b}$ Lösung für u^{m+1} via Comp.